

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

[博客园](#)
[首页](#)
[新随笔](#)
[联系](#)
[订阅](#) 
[管理](#)

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的
园龄：4年7个月
粉丝：288
关注：5
[+加关注](#)

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动人科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

[马上参与](#)

搜索

常用链接

[我的随笔](#)
[我的评论](#)
[我的参与](#)
[最新评论](#)
[我的标签](#)

积分与排名

积分 - 457097
排名 - 1198

概率笔记4——重要公式

概率公式是概率计算中的重要环节，全概率公式、贝叶斯公式等可以运用于复杂事件的概率，而所有这些公式又是由基本公式推导出来的。

基本公式

对于任意事件A和B

$$1) P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$2) P(A - B) = P(A) - P(AB) \quad (B \subseteq A)$$

$$3) P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$4) P(A + B + C) =$$

$$P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

公式1说的是A发生的概率等于1减去A不发生的概率（对立事件的概率）。换种说法可能更好理解，A发生的概率加上A不发生的概率等于1，也就是A事件要么发生要么不发生。这是废话，也是很重要的实话，因为很多时候直接计算A发生的概率很困难，但计算A不发生的概率确很简单。

公式2说的是当A发生且B不发生的概率；公式3是当且仅当A,B中至少有一个发生的概率；公式4不解释。2、3和集合运算一致，公式3还有两个等同写法：

$$P(A + B) \leftrightarrow P(A \text{ or } B) \leftrightarrow P(A \cup B)$$

值得注意的是，不能像下面这样写：

$$P(A) + P(B) \leftrightarrow P(A) \cup P(B)$$

this is wrong, not the same

A和B是事件，事件是集合，所以可以使用集合符号，但P(A)和P(B)是概率，是具体的数值，所以不能使用集合符号。

互斥事件

如果有两个事件A和B，发生了A就不会发生B，发生了B就不会发生A，那么他们两个是互斥的，如果用集合表示，则 $A \cap B = \phi$ 。互斥事件也叫互不相容事件。

对于互斥事件A和B：

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

这实际上来自基本公式：

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫大人

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(AB)}_{\emptyset} = P(A) + P(B)$$

对于更多的互斥事件，如果 $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ 两两互斥，则当且仅当 $A_1 \sim A_n$ 中至少有一个发生的概率：

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

上式更专业的写法：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

独立事件

什么是独立

两个事件是独立的，直觉上是指：在一次实验中，一个事件的发生不会影响到另一事件发生的概率，二者没有任何关系。如，骰子掷出“6点”的事件和骰子掷出“1点”的事件是相互独立的。

需要注意的是，“互斥”是描述的是集合关系，“独立”描述是概率关系，二者间不在同一维度，不要试图将二者联系到一起。

独立事件有一个充要条件：如果n个事件互相独立，那么如果它们中的任意一部分换成各自的对立事件后，所得的新n个事件互相独立：

$$A、B \text{ 相互独立} \Rightarrow \bar{A}、B \text{ 相互独立}$$
$$A、\bar{B} \text{ 相互独立}$$
$$\bar{A}、\bar{B} \text{ 相互独立}$$

公式

对于独立事件A和B，二者同时发生的概率等于二者的乘积：

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

其等同写法：

$$P(AB) \leftrightarrow P(A \text{ and } B) \leftrightarrow P(A \cap B)$$

注意，只有在A和B是独立事件时上式才成立。

推广到更多独立事件，如果 $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ 相互独立，则 $A_1 \sim A_n$ 同时发生的概率：

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$$

更专业的写法：

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At) 有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \sqrt{2gh}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

如果 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 相互独立，则当且仅当 $A_1 \sim A_n$ 中至少有一个发生的

概率：

$$\begin{aligned}
 P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \underbrace{P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)}_{\text{左式的另一种写法}} \\
 &= \underbrace{1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n})}_{\text{基本公式 1}} \\
 &= 1 - \underbrace{P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n})}_{\text{长杠变短杠，符号换方向}} \\
 &= 1 - \underbrace{P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) \dots P(\overline{A_n})}_{\text{独立事件公式 1}} \\
 &= 1 - \prod_{i=1}^n P(\overline{A_i}) \\
 &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i))
 \end{aligned}$$

条件概率

垂帘听政

条件概率是指在A事件发生的条件下，事件B发生的概率，用符号表示：

$$P(B|A)$$

中间的竖线看成帘子，A是太后，B是幼主，A对B垂帘听政。

公式

$$1) P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (P(A) > 0)$$

$$2) P(AB) = P(A)P(B|A)$$

实际上两个公式是一样的，将公式1左右两侧同时乘以 $P(A)$ 就得到了公式2。

需要注意的是，这里并没有指明A和B是独立事件。如果A和B是独立事件，根据独立事件公式， $P(AB) = P(A)P(B)$ ，最后一项由 $P(B|A)$ 变成了 $P(B)$ ，意思是B的发生与A无关，即太后想要垂帘听政，但是幼主长大了，不听她的。

注意，虽然 $P(AB) = P(BA)$ ，但 $P(A|B) \neq P(B|A)$ ：

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(BA) = P(B)P(A|B)$$

对于更多事件，可以反复使用公式1和2：

$$P(ABC) = P(AB)P(C|AB) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$$

$$\begin{cases} P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(BA)}{P(A)} \\ P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(BA)}{P(B)} \end{cases} \xrightarrow{\text{when } P(A) \neq P(B)} P(B|A) \neq P(A|B)$$

全概率公式

引例

一个村子里有三个独立作案的小偷，小偷参与盗窃的概率和盗窃能力已知，每次盗窃事件仅与其中一人有关，求村子失窃的概率。

有点难度了。

首先需要将问题转换成数学模型。令B事件为村子失窃事件，所求的是P(B)；设三个小偷 A_1, A_2, A_3 ，小偷的全集就是 $\Omega = \{A_1 \cup A_2 \cup A_3\}$ ；每次盗窃事件仅与其中一人有关， A_1, A_2, A_3 是互斥的；小偷盗窃能力相当于该小偷在实施偷盗的情况下失窃的概率， $P(B|A_i)$ 。现在：

$$P(B) = P(B\Omega)$$

盗窃事件一定有小偷参与

$$= P(B(A_1 \cup A_2 \cup A_3))$$

$$= P(BA_1 \cup BA_2 \cup BA_3)$$

$$= P(BA_1) + P(BA_2) + P(BA_3)$$

互斥事件概率公式

$$= P(A_1B) + P(A_2B) + P(A_3B)$$

$$= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$

条件概率公式

$$= \sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B|A_i)$$

最终得到的就是全概率公式了，实际上就是由简单概率一步步推导而来，最重要的还是建立正确的概率模型。

公式

如果事件 $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ 构成一个完备事件组，即它们两两互不相容，其和为全集 Ω ；并且 $P(A_i) > 0$ ，则对任一试验B有：

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i) = \sum_{i=1}^n P(BA_i)$$

右侧的两个表达式之所以相等，是因为：

$$P(A_i)P(B|A_i) = P(A_i) \frac{P(BA_i)}{P(A_i)}$$

不同的马甲

全概率公式的马甲众多，下面是教科书中的一个示例。

电子厂所用原件是由三个厂家提供的，已知以下数据：

原件场	次品率	供货份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

原件在仓库混合存放，每个元件没有明显区别，从仓库中随机取一个，次品的概率是多少？

数学模型：A₁,A₂,A₃分别表示元件是由三家元件场生产的，Ω = {A₁∪A₂∪A₃}；从仓库中随机取一个，得到次品的事件是B，P(B)为所求；P(A_i)是供货份额，P(B|A_i)是A_i的次品率。

$$P(B) = P(B\Omega) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i) = 0.0125$$

贝叶斯公式

公式

大名鼎鼎的公式，常见的一个版本：

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

很多时候，求P(A|B)很困难，但求P(B|A)却很容易。上面的公式实际上是条件概率公式简单的推导：

$$P(A|B) = \frac{P(BA)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

结合全概率公式：

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\underbrace{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}_{P(B)}} \quad (A_j \cap A_i = \emptyset, i \leq n, j \leq n)$$

示例

对于上一节的元件次品问题，从仓库中随机取一个，如果是次品，那么该次品是哪个厂商的概率最大？

数学模型：A₁,A₂,A₃分别表示原件是由三家元件场生产的，从仓库中随机取一个，得到次品的事件是B，P(A_i|B)就表示次品是A_i生产的概率。

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.15 \times 0.02}{0.0125} = 0.24$$

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{0.80 \times 0.01}{0.0125} = 0.64$$

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)} = \frac{0.05 \times 0.03}{0.0125} = 0.12$$

先下手为强

最后来看一个示例，甲乙二人轮流独立地对同一目标射击，谁先命中谁获胜，甲命中的概率是 α ，乙是 β 。现在由甲先射击，求二人获胜的概率分别是多少？

甲获胜的全集：{第1次射击时获胜 $\cup$ 第3次射击时获胜 $\dots \cup$ 第 $2n-1$ 次射击时获胜}， n 是自然数， $n \geq 1$ ；甲第3次射击获胜的前提是，甲第1次射击失败且乙第2次射击失败，以此类推，甲的获胜全事件 $\Omega = \{\text{甲第1次射击获胜} \cup (\text{甲第1次射击失败} \cap \text{乙第2次射击失败} \cap \text{甲第3次射击获胜}) \dots \cup (\text{甲第}2n-1\text{次射击时获胜}(\text{甲之前都失败} \cap \text{乙之前都失败}))\}$ 。用 A 、 B 分别表示甲乙的获胜事件，各事件之间相互独立（轮流独立射击），获胜事件之间互斥（谁先命中谁获胜，只能有一人胜出），下标表示二人出场次数，则：

$$\begin{aligned} P\{\text{甲获胜}\} &= P\left\{A_1 \cup \underbrace{(\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap A_3)}_{\text{第3次射击时获胜}} \cup \underbrace{(\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{B_4} \cap A_5)}_{\text{第5次射击时获胜}} \cup \dots\right\} \\ &= \underbrace{P(A_1) + P(\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap A_3) + (\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{B_4} \cap A_5) + \dots}_{\text{互斥事件公式}} \\ &= P(A_1) + \underbrace{P(\overline{A_1})P(\overline{B_2})P(A_3)}_{\text{独立事件公式}} + P(\overline{A_1})P(\overline{B_2})P(\overline{A_3})P(\overline{B_4})P(A_5) + \dots \\ &= \alpha + (1-\alpha)(1-\beta)\alpha + (1-\alpha)^2(1-\beta)^2\alpha + \dots \\ &= \underbrace{\alpha \sum_{n=0}^{\infty} ((1-\alpha)(1-\beta))^n}_{\text{几何级数}} \quad \alpha < 1, \beta < 1, (1-\alpha)(1-\beta) < 1 \\ &= \frac{\alpha}{1 - (1-\alpha)(1-\beta)} \end{aligned}$$

幂级数可参考《[数学笔记31——幂级数和泰勒级数](#)》

$$P\{\text{乙获胜}\} = 1 - P\{\text{甲获胜}\} = 1 - \frac{\alpha}{1 - (1-\alpha)(1-\beta)}$$

如果甲乙实力相当， $\alpha = \beta = p < 1$ ， $q = 1-p < 1$ 则：

$$P\{\text{甲获胜}\} = \frac{p}{1 - (1-p)^2} = \frac{p}{2p - p^2} = \frac{1}{2-p} = \frac{1}{1+q}$$

$$P\{\text{乙获胜}\} = 1 - P\{\text{甲获胜}\} = 1 - \frac{1}{1+q} = \frac{q}{1+q}$$

$$q < 1 \Rightarrow P\{\text{甲获胜}\} > P\{\text{乙获胜}\}$$

所以说二人势均力敌时，先下手者为强。该结论也出现在其它运动中，比如围棋，先手需要胜出后手5个棋子才算获胜，而后手只需要胜出一个棋子就算获胜。

作者: 我是8位的

出处: <http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注公众号“我是8位的”



随笔

分类: 概率

标签: 概率公式, 全概率公式, 贝叶斯公式

好文要顶

关注我

收藏该文

我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

+加关注

0

推荐

0

反对

« 上一篇: [多变量微积分笔记17——通量](#)
» 下一篇: [多变量微积分笔记18——连通区域](#)

posted on 2018-05-08 18:36 我是8位的 阅读(6793) 评论(0) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

- 【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事
- 【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告 X

yo zodcs.com

永中DCS，文档在线预览处理专家

10年行业经验，受到众多政府客户、央企单位、邮箱客户、OA办公系统、招聘网站、教育客户青睐

了解详情 >

编辑推荐：

- 革命性创新，动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

活动时间：2022年3月8日~3月18日



最新新闻：

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes